Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Aéronautique

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Ventes et réparations dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point M, situé sur le fond du tiroir, et le point O, situé sur le fond du meuble, est modélisée par une fonction du temps. L’exercice étudie cette fonction avec une équation différentielle, ses variations, un algorithme de seuil et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant de l’équation du second degré : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme il est positif, l’équation admet deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ donne directement les deux valeurs recherchées. On peut vérifier chacune en la remplaçant dans le polynôme $r^2 + 5r + 4$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 sur [0 ; +∞[.

L’équation caractéristique de l’équation différentielle est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont celles obtenues à la question précédente : -1 et -4. D’après le tableau fourni pour le cas de deux racines distinctes, la solution générale est la somme de deux exponentielles, chacune associée à une racine et multipliée par une constante réelle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse à l’instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

À l’instant initial, la distance entre les points O et M est donnée comme étant de 20 cm. La fonction f représente cette distance, donc sa valeur initiale est cette mesure. La vitesse de déplacement est la dérivée de la distance par rapport au temps. Elle est négative puisque le point M se rapproche de O.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l'expression admise de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La fonction donnée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Deux secondes après le début de la fermeture, on remplace directement t par 2 : les exposants deviennent respectivement -2 et -8. Cette expression exacte représente la distance OM, exprimée en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

On évalue la distance au bout de 4 secondes avec l'expression de f : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette valeur est strictement inférieure au seuil de fermeture, 0,5 cm. Comme la distance diminue au cours du temps, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé avant 4 s, car $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞ est 0, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent elles aussi vers $+\infty$. Par la limite rappelée dans l'énoncé, chacune des exponentielles tend vers 0. Les deux termes de la différence tendent donc vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La fonction tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, si une fonction tend vers une valeur finie L en l'infini, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, cette valeur est 0. La droite correspondante est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. La dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, et celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$, par la dérivation d'une composée. Le signe moins déjà présent devant le second terme devient donc un signe plus.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle étudié, l'énoncé indique que $f'(t) < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, sa limite est 0. Le tableau résume ces valeurs et le sens de variation sur $[0; +\infty[$.

t	**0**		$+\infty$
$f(t)$	20	↘	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

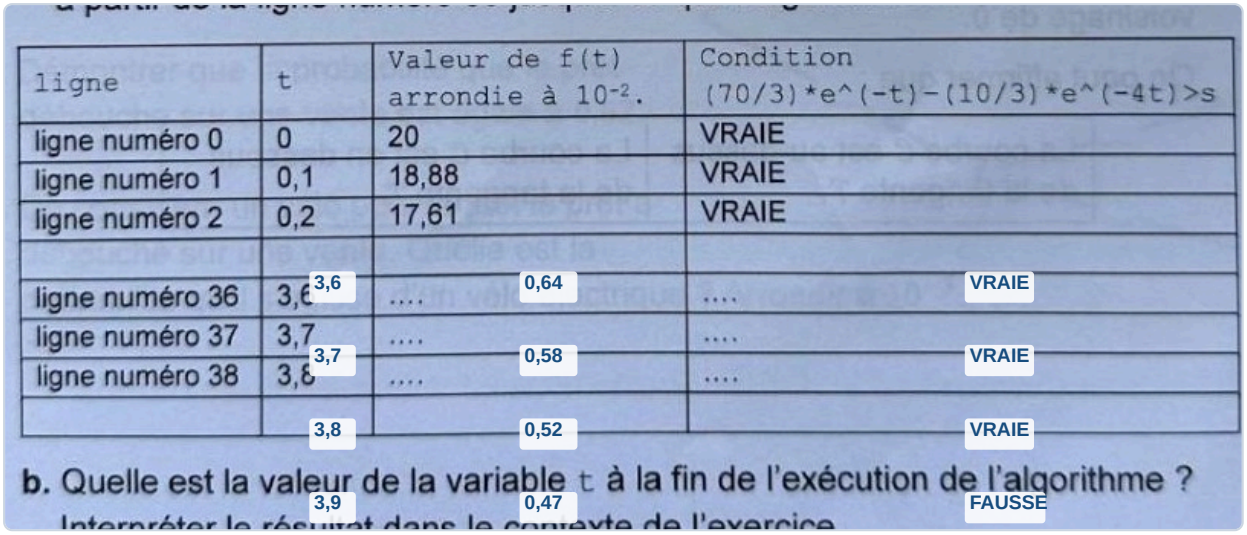
f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de t, de f(t) arrondies à 10^{-2} et la valeur de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque ligne, l'algorithme augmente t de 0,1 et teste si $f(t) > 0,5$. La valeur de $f(t)$ affichée est arrondie au centième, mais la condition est évaluée à partir de la formule de f. À 3,8 s, la condition est encore vraie; à 3,9 s, elle devient fausse, ce qui termine la boucle.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

3,6 0,64 VRAIE
3,7 0,58 VRAIE
3,8 0,52 VRAIE
3,9 0,47 FAUSSE

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À 3,8 s, la distance vaut environ 0,52 cm, donc elle reste supérieure au seuil de 0,5 cm et la boucle poursuit ses instructions. Elle augmente alors t de 0,1 s. À 3,9 s, la distance vaut environ 0,47 cm : la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$t = 3,9$ s : selon le modèle, le tiroir est fermé.

Question 4.a. À partir du développement limité fourni, déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

Le développement limité fourni indique que les premiers termes de $f(t)$ sont $20 - 10t - 15t^2$. La tangente en $t = 0$ est déterminée par l'ordonnée à l'origine $f(0) = 20$ et par le coefficient directeur $f'(0) = -10$. Le terme en t^2 n'intervient pas dans son équation.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les propositions à choix multiples, recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Il faut recopier la proposition qui correspond au développement limité d'ordre deux fourni par le logiciel. La partie régulière est $20 - 10t - 15t^2$. Le reste d'un développement limité d'ordre deux s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Une seule proposition respecte cette forme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. **Parmi les deux propositions, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro.**

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. D'après le développement limité, la différence entre la fonction et cette tangente vaut $-15t^2 + t^2\varepsilon(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$. Comme $\varepsilon(t)$ tend vers 0, le facteur entre parenthèses est négatif au voisinage de 0. Pour $t > 0$, la courbe est donc en dessous de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Ventes et réparations dans un magasin de vélos

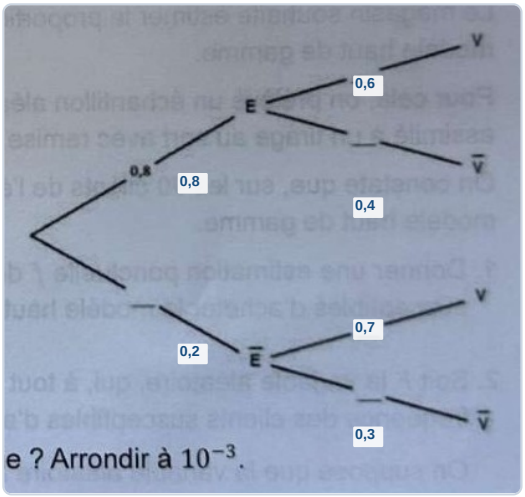
Un magasin prête gratuitement des vélos électriques ou mécaniques à ses clients dans l'espoir de réaliser une vente, avec des taux de vente différents selon le type de vélo. L'exercice porte aussi sur la durée de réparation d'un échantillon de vélos et sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

La première bifurcation distingue les vélos électriques et mécaniques. Pour chaque type, la probabilité de vente est donnée par l'énoncé ; la probabilité d'absence de vente est sa complémentaire.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

E : 0,8 ; non E : 0,2. Depuis E : V : 0,6 ; non V : 0,4. Depuis non E : V : 0,7 ; non V : 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V), où E désigne l'événement « le vélo prêté est électrique » et V l'événement « le prêt débouche sur une vente ».

Le chemin correspondant à « vélo électrique et vente » a pour probabilité le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique et de celle d'une vente sachant que le vélo est électrique : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux chemins menant à une vente sont incompatibles : vélo électrique ou vélo mécanique. On additionne leurs probabilités : $P(V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique et arrondir à 10^{-3}.**

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Avec les probabilités calculées précédemment : $P_V(E) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **On admet que X, le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre dans un échantillon de 80 vélos réparés, suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**

Chaque vélo réparé constitue une épreuve, avec pour succès une réparation nécessitant moins d'une heure. La probabilité de succès est 0,62 et l'échantillon compte 80 vélos. Ainsi, les paramètres de la loi binomiale sont l'effectif 80 et la probabilité de succès 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40) et arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, $P(X = 40) = \binom{80}{40} \times 0,62^{40} \times 0,38^{40} \approx 0,008269$. L'arrondi au millième est 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure, puis arrondir à 10^{-3}.**

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les autres, soit $80 - X$, en nécessitent plus d'une heure. La première quantité est strictement supérieure lorsque $X > 80 - X$, donc lorsque $X \geq 41$. Ainsi, $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,981$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité demandée est $0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence observée dans l'échantillon : $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.**

Avec la formule fournie, l'intervalle est $\left[f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \,;\, f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Pour $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut environ 0,1012. L'intervalle est donc $[0,4988\,;\,0,7012]$, soit au millième $[0,499\,;\,0,701]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. **Est-on certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu ?**

Non. Un intervalle calculé à partir d'un échantillon ne garantit pas que la proportion inconnue y appartienne. Le niveau de confiance de 95 % décrit la proportion d'intervalles qui contiendraient la vraie proportion si l'on répétait le prélèvement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, l'appartenance de p à cet intervalle n'est pas certaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Les deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir et un magasin de vélos, en mobilisant équations différentielles, analyse, algorithmes, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme des solutions.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, f y est strictement décroissante et chaque seuil compris dans son image est franchi au plus une fois.
- Pour des événements E et V, $P(E \cap V) = P(E)P(V|E)$; P(V) se calcule en additionnant les probabilités des chemins qui aboutissent à V.
- Une loi binomiale B(n, p) modélise le nombre de succès lors de n essais indépendants ayant chacun une probabilité p de succès.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle du tiroir : f(t) est exprimée en centimètres et t en secondes.
- Dans l'arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et vérifier que les branches issues d'un même nœud totalisent 1.
- Traduire « strictement supérieur » par une inégalité stricte, puis tenir compte du caractère entier de la variable X.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue y appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer la fonction du tiroir ?

La position initiale donne f(0) et la vitesse initiale donne f'(0), avec son signe. On substitue ces deux valeurs dans la solution générale de l'équation différentielle pour déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente ?

On additionne les probabilités des chemins menant à une vente : probabilité du type de vélo multipliée par la probabilité conditionnelle de vente pour ce type. Il faut calculer les contributions des vélos électriques et mécaniques.

Q : Comment traduire la condition où les réparations de moins d'une heure sont majoritaires ?

Si X est le nombre de réparations de moins d'une heure, les autres réparations sont au nombre de 80 - X. La condition X > 80 - X équivaut à X > 40, donc à X ≥ 41 puisque X est entier.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % signifie-t-il que p y appartient avec certitude ?

Non. Le niveau de 95 % décrit la couverture de la méthode sur des répétitions d'échantillonnage. Après calcul de l'intervalle, on ne peut pas affirmer avec certitude que la proportion inconnue p lui appartient.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Aéronautique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.