Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Aéronautique

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Conception et industrialisation en microtechniques : 1,5 ; Électrotechnique : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle** (12 questions) **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique** (9 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage dont la vitesse est modélisée par une fonction f. L'exercice porte sur une équation différentielle, l'évolution de cette vitesse, la distance parcourue et le développement limité de f au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré, en utilisant la formule fournie.

On applique la formule fournie à l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. Les solutions sont donc les fonctions exponentielles de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Cette expression est définie et dérivable sur l'intervalle demandé $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout t, g vérifie bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), à savoir $g(t) = 5$. La différence entre toute solution de (E) et cette solution particulière vérifie l'équation homogène (E_0). En ajoutant 5 à la famille trouvée en 1.a, on obtient donc toutes les solutions de (E) sur l'intervalle considéré.

$$y(t) = ke^{-0,8t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\{t \mapsto ke^{-0,8t} + 5 \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale de (E) est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$.
2. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ impose $k + 5 = 20$, soit $k = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle tend alors vers zéro : $e^{-0,8t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme tend donc vers zéro et le second reste constant. Ainsi, la limite de $f(t)$ est égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La fonction $f(t)$ tend vers la valeur finie 5 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, sa courbe représentative admet donc une asymptote horizontale en cette limite. Une droite horizontale d'ordonnée 5 a pour équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse décroît et tend vers $5\ \mathrm{m/s}$, sans atteindre zéro : le système de freinage ne permet donc pas l'arrêt selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$ et tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation de l'exponentielle, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Comme $18,75 \times 0,8 = 15$, cela donne $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Donc F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est bien une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance entre 0 et 1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec la primitive donnée, on calcule $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = [-18,75e^{-0,8} + 5] - [-18,75] = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette expression est la valeur exacte ; son évaluation décimale permet ensuite l'arrondi demandé au centimètre.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.

Le polynôme affiché par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, il faut choisir celle qui reprend ce polynôme et écrit le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la troisième proposition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'expression de la fonction, $f(0) = 15 + 5 = 20$, et la dérivée donnée dans la partie B donne $f'(0) = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d’un système électrique

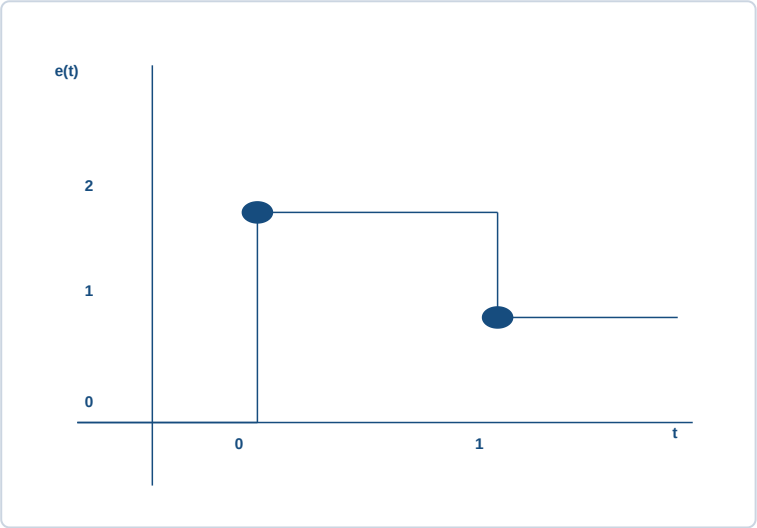
Un système électrique de fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1) reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1). L’exercice demande de représenter le signal d’entrée, d’utiliser les transformées de Laplace pour déterminer le signal de sortie, puis d’étudier celui-ci après t = 1.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Par définition, le premier échelon vaut 0 avant 0 et 1 à partir de 0. Le second vaut 0 avant 1 et 1 à partir de 1. Ainsi, le signal est nul avant 0, vaut 2 de 0 inclus à 1 exclu, puis vaut 1 à partir de 1. Le tracé ci-dessous marque les deux instants de saut et les trois niveaux.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$. Pour l’échelon retardé, il donne $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on les combine avec leurs coefficients et leurs signes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - (1/[p(p + 1)])e^(-p).

La relation de transfert est $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant par $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, on obtient $S(p) = \frac{1}{p+1}(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p})$. On distribue le facteur puis on écrit les termes avec le dénominateur commun $p(p+1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. On retrouve donc le membre de gauche. L'égalité est valable pour les valeurs de p pour lesquelles les dénominateurs ne sont pas nuls.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Question 3. Déterminer les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de (1/(p + 1))e^(-p).

Les deux premières transformées inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : multiplier une transformée par e^{-p} revient à remplacer le signal par son décalage, nul avant $t = 1$. On conserve l'ordre des quatre expressions demandé dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Avec la décomposition précédente, $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Les termes multipliés par e^{-p} ont des transformées inverses contenant $U(t-1)$, donc ils sont nuls lorsque $0 \leq t < 1$. Il reste l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

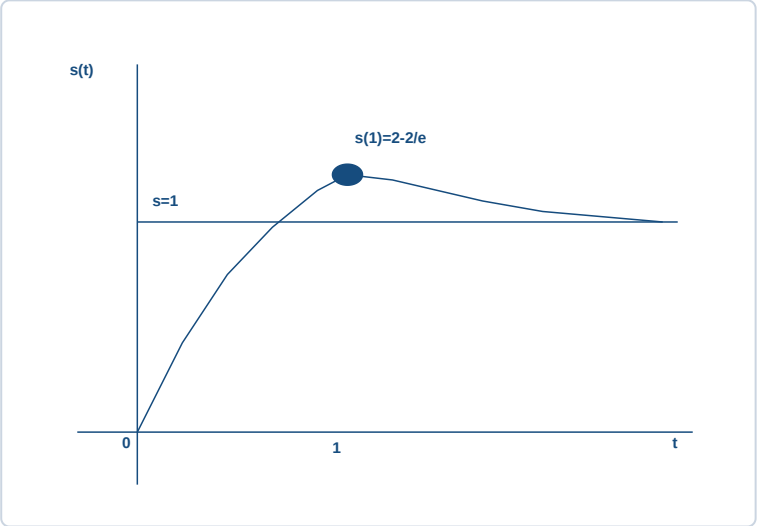
On substitue $t = 1$ dans l'expression valable pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En développant, $(e-2)/e + 1 = 2 - 2/e$. La valeur approchée est $1,264\ldots$, qui s'arrondit au dixième à $1,3$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, le signal suit $2(1-e^{-t})$: il part de 0 et croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$. À partir de 1, il suit $1 + (e-2)e^{-t}$ et décroît vers 1, en restant au-dessus de cette limite. La courbe est continue en 1 ; le tracé représente ces deux branches et l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît de 0 à $2 - 2/e$ en $t = 1$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc dans la limite, tandis que le terme constant reste égal à 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, est identifiée par le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on peut former les solutions en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, alors f(t) tend vers 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t)dt.
- Un retard d'une unité dans le temps introduit le facteur e^(-p) dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : la vitesse est en m/s, le temps en secondes et la distance en mètres.
- Pour dresser un tableau de variation, étudier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle demandé.
- Pour un terme retardé, appliquer la propriété de décalage et tenir compte de l'échelon U(t - 1).
- Pour les tracés, respecter les ruptures des signaux et reporter les courbes sur le document-réponse demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Avec une primitive F de f, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on arrondit le résultat à la précision demandée.

Q : Comment traiter un terme retardé comme e^(-p)/[p(p + 1)] ?

On décompose d'abord 1/[p(p + 1)] en éléments simples, puis on applique la propriété de retard. Le facteur e^(-p) correspond à un décalage d'une unité et introduit l'échelon U(t - 1).

Q : Combien de temps dure l'épreuve et quel est son barème ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points, soit 20 points au total. Le coefficient dépend de la spécialité : 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et 2 en électrotechnique.

Q : Que faut-il remettre pour les tracés et comment présenter les calculs numériques ?

Les courbes demandées doivent être tracées sur le document-réponse à rendre avec la copie. Pour les calculs, présenter la valeur exacte lorsqu'elle est demandée, puis l'arrondi à la précision indiquée dans l'énoncé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Aéronautique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.