Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux)**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités, durée de vie des tubes et intervalle de confiance** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s ralentit sous l'action d'un système de freinage, et sa vitesse est étudiée en fonction du temps. Les questions mobilisent une équation différentielle, l'étude d'une fonction exponentielle, le calcul d'une distance par intégration, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

La formule des solutions de $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Ainsi, g est bien solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution de (E).

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène (E_0), soit $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, la condition initiale donne $5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de la définition f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers 0 et la limite de $f(t)$ vaut 5.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et donner une équation de celle-ci.

Une limite finie en $+\infty$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = L$, où L est cette limite. Ici, $L = 5$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t) pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais. Elle tend vers 5 m/s sans l'atteindre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste supérieure à 5 m/s.

Question 4.a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Or cette expression est $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est d = ∫[t_0 à t_1] f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $F(1) - F(0)$. En remplaçant dans l'expression de la primitive, on obtient $(-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. À deux décimales, cela donne 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, en tenant compte de la forme du reste proposée. Aucune justification n'est demandée.

Le terme d'ordre 2 vaut $\frac{24}{5}t^2 = 4,8t^2$. La forme du reste d'un développement limité à l'ordre 2 est $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Il faut donc retenir la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$: troisième proposition.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces valeurs, on obtient l'équation de la tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie des tubes et intervalle de confiance

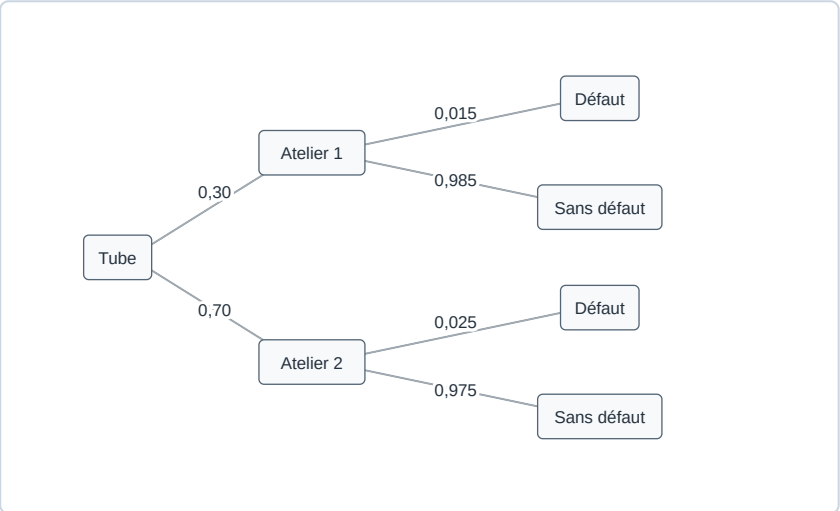
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers ayant des parts de production et des taux de défaut différents, puis on étudie la durée de bon fonctionnement d'un tube par une loi exponentielle. La dernière partie porte sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant l'origine du tube, atelier 1 ou atelier 2, puis la présence ou l'absence d'un défaut.

On lit les probabilités des ateliers et les taux de défaut dans l'énoncé. Pour chaque atelier, la probabilité de l'absence de défaut est le complément du taux de défaut : $1 - 0{,}015 = 0{,}985$ pour l'atelier 1 et $1 - 0{,}025 = 0{,}975$ pour l'atelier 2. L'arbre ci-dessous porte les probabilités des ateliers sur les premières branches et les probabilités conditionnelles sur les suivantes.

Origine du tube et présence d'un défaut



Probabilités indiquées sur les branches.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), défaut (0,015), sans défaut (0,985) ; atelier 2 (0,70), défaut (0,025), sans défaut (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

L'événement $A_1 \cap D$ correspond au chemin qui passe par l'atelier 1 puis par la branche « défaut ». La probabilité de ce chemin est le produit des probabilités des deux branches : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Pour obtenir un pourcentage, on multiplie cette valeur par 100.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,0195, comme indiqué dans l'énoncé.**

Un tube peut être défectueux après avoir été produit dans l'un ou l'autre atelier. On additionne donc les probabilités des deux chemins : $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. La valeur 0,0195 imprimée sur la photo est barrée et corrigée à la main en 0,0220, ce qui concorde avec les données.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}0220$, soit 2,20 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. Le numérateur est la probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut, soit $0{,}70 \times 0{,}975$. Le dénominateur est $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}022$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}70 \times 0{,}975}{1 - 0{,}022} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée T de bon fonctionnement, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. L'espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube dans le modèle étudié.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule de l'énoncé donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$ heures, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} \approx 0{,}55067$. Une variable exponentielle étant continue, les probabilités $P(T < 8\,000)$ et $P(T \leq 8\,000)$ sont égales. L'arrondi au centième donne 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t est le complément de la probabilité de fonctionner au plus t heures : $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} \approx 0{,}36788$. L'arrondi demandé au centième est 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence estime la proportion inconnue p dans l'ensemble de la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle au millième.

On applique la formule de l'énoncé avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$. La marge vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes sont donc $0{,}975 - 0{,}009677$ et $0{,}975 + 0{,}009677$, arrondies au millième comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Le sujet étudie le freinage d'un chariot, les défauts et la durée de vie de tubes, ainsi que la conformité des rivets, en évaluant équations différentielles, analyse, probabilités et estimation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' + ay = b, on ajoute une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée et n l'effectif.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle.
- Distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'une vitesse qui atteint zéro en un temps fini.
- Pour une distance, utiliser les bornes temporelles et la primitive correctes, puis respecter l'arrondi au centimètre.
- En probabilités conditionnelles, distinguer probabilité conjointe, probabilité totale et probabilité conditionnelle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante et d'obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment calculer les probabilités de durée de vie demandées ?

Avec une loi exponentielle de paramètre λ, utilisez P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) pour une durée inférieure ou égale à t. Pour une durée strictement supérieure, utilisez le complément e^(-λt).

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, et les trois parties de chacun peuvent être traitées indépendamment. Repérez les questions accessibles, gardez du temps pour les calculs et vérifiez les arrondis avant de rendre.

Q : Quels éléments faut-il montrer pour obtenir les points de méthode ?

Présentez les formules utilisées, les étapes essentielles du calcul et les unités lorsqu'elles sont pertinentes. Respectez la consigne d'arrondi et, pour le QCM sur le développement limité, recopiez une seule réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Aéronautique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.