Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : de 1 à 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2018/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d’un train à très haute vitesse

L’exercice modélise le départ d’un wagon propulsé par électromagnétisme dans un tube à basse pression, avec l’objectif d’atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. Il mobilise une équation différentielle, l’étude d’une fonction distance-vitesse et le calcul de l’aire d’une pièce prévue pour une gare.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On compare l’équation à la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc $-a = 0,2$. Les solutions sont des exponentielles de coefficient constant réel. Elles sont définies sur tout l’intervalle demandé, qui inclut 0 et s’étend jusqu’à l’infini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. On dérive $g(t) = -15t - 75$, d’où $g'(t) = -15$.
2. On substitue dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

On retrouve le second membre pour tout $t \in [0, 3]$. La fonction g vérifie donc bien l’équation différentielle sur l’intervalle indiqué.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution.

Question 3°. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l’équation homogène sont $ke^{0,2t}$, où k est une constante réelle. À la question précédente, on a vérifié que $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière de l’équation complète. Toute solution de cette équation s’obtient en ajoutant à cette solution particulière une solution de l’équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t vérifiant la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant la constante dans l'expression générale, on obtient la fonction demandée. Elle vérifie bien l'équation différentielle et la condition de départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À l'aide de l'expression fournie pour f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

D'après l'expression fournie, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, soit $t \geq 0$. Tous les points de l'intervalle étudié satisfont donc l'inéquation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, avec égalité seulement pour $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

t	**0**	$]0, 3]$	**3**
$f'(t)$	0	+	+
$f(t)$	0	croissante	$16,659$

La dérivée est positive après 0, donc f est croissante sur $[0, 3]$. À l'extrémité, $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$ km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à environ $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Au bout d'une minute, la distance parcourue est $f(1)$. En utilisant l'expression de la fonction, $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. On arrondit au dixième de kilomètre, comme le demande l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question 3° a). La vitesse du wagon à l'instant t est donnée par f'(t), en kilomètres par minute. Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse à l'instant t est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. Pour $t = 2$, on obtient $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min. L'arrondi demandé au dixième s'effectue dans cette unité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$7,4$ km/min.

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse à partir de la vitesse calculée à t = 2 minutes.

À deux minutes, la vitesse est d'environ $7,377$ km/min. Pour la comparer à l'objectif, exprimé en km/h, on convertit : $7,377 \times 60 \approx 442,6$ km/h. La vitesse est croissante sur $[0, 3]$, car $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ augmente. Le seuil de 400 km/h est donc franchi avant deux minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le wagon dépasse 400 km/h avant deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois expressions proposées, recopier l'unique équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente en $t = 2$ a pour pente $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$. En appliquant la formule de tangente à cette abscisse, son ordonnée à l'origine se simplifie en $45e^{0,4} - 75$. Parmi les trois propositions du sujet, seule la troisième possède cette pente et cette ordonnée à l'origine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75.$

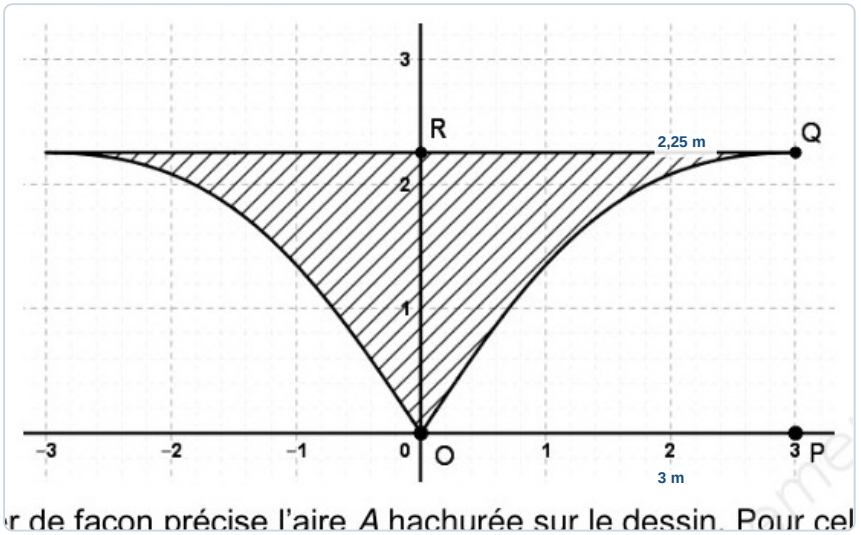
C. Calcul intégral

Question 1°. En utilisant le schéma de la pièce et ses dimensions, choisir l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les trois réponses proposées.

Dimension du rectangle OPQR	Valeur lue sur le schéma
Largeur OP	3 m
Hauteur OR	2,25 m
Aire A_1	$3 \times 2,25 = 6,75$ u. a.

Le schéma donne une largeur de 3 unités et le bord supérieur est à l'ordonnée 2,25. Comme une unité graphique représente un mètre, le produit des deux dimensions donne l'aire demandée.

Dimensions du rectangle OPQR



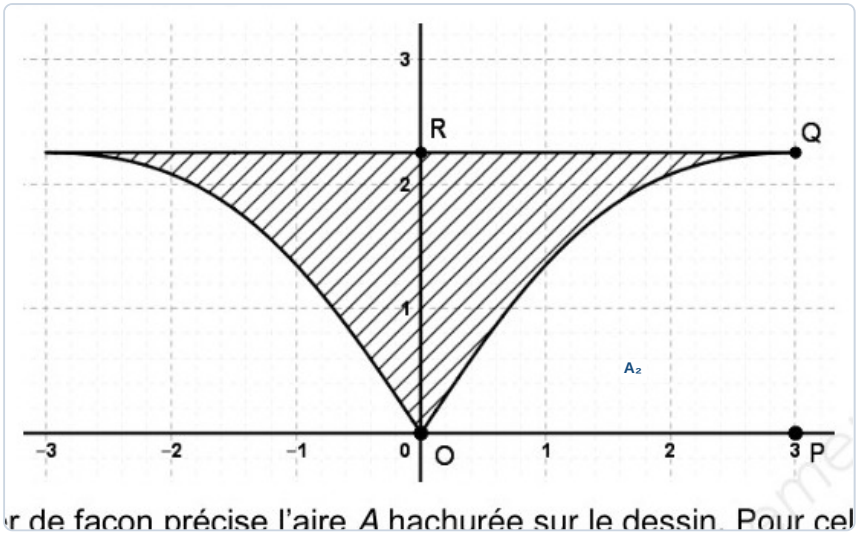
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie de g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la partie limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire est l'intégrale de g entre 0 et 3. Avec la primitive fournie, $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. On obtient $A_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$, soit environ 4,679 unité d'aire.

Aire sous la courbe de g



✓ RÉPONSE À RETENIR

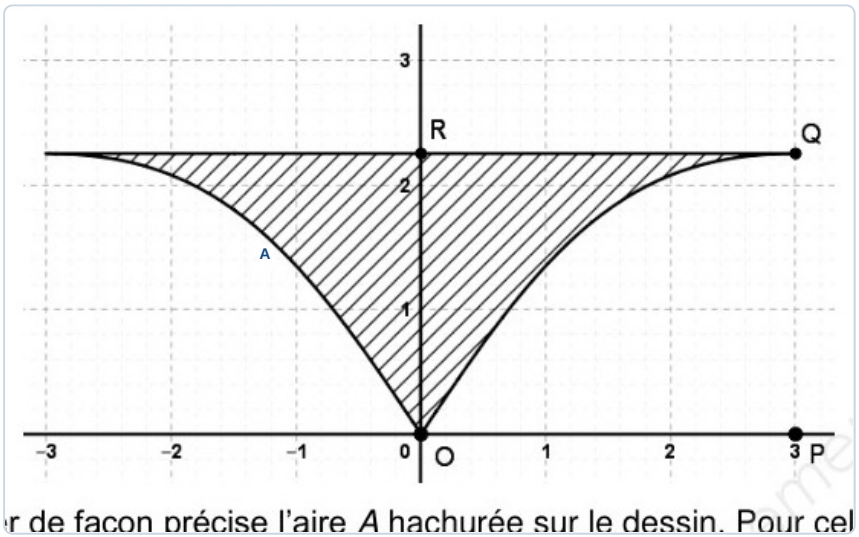
$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. À partir des questions précédentes et de la symétrie de la pièce par rapport à l'axe des ordonnées, déduire l'aire hachurée A et arrondir au millième.

1. Sur la partie droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle diminuée de l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$.
2. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale vaut $A = 2(A_1 - A_2)$.

En remplaçant par les valeurs exactes, $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,142514$ unité d'aire, puis on arrondit au millième.

Aire hachurée de la pièce



✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle de smartphones, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot de 50. Il se termine par un test bilatéral destiné à examiner l'affirmation selon laquelle 55 % des personnes pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l'énoncé et de la population de 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant les appareils touchés ou non par l'obsolescence technique et logicielle.

Les effectifs concernés par T et L se déduisent des proportions sur 200 smartphones. On obtient 6 appareils touchés par T et 16 par L. Parmi les 16 touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2 appareils. Les autres cases se calculent par différence, puis les totaux vérifient que les 200 appareils sont bien comptabilisés.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	**200**

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180 ; totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les probabilités simples sont les proportions indiquées dans l'énoncé : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La probabilité conditionnelle demandée concerne les smartphones déjà touchés par L : parmi eux, 12,5 % sont également touchés par T. En écriture décimale, on convertit chaque pourcentage en le divisant par 100.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T)=0,030 ; P(L)=0,080 ; P_L(T)=0,125.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle.

Pour calculer la probabilité d'être touché simultanément par T et L, on utilise la probabilité conditionnelle donnée dans l'énoncé. On multiplie la probabilité de L par la probabilité d'être aussi touché par T sachant L. Le calcul donne une proportion de 1 % dans l'ensemble des smartphones :

$$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,080 \times 0,125 = 0,010.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∩ L)=0,010, soit 1 % des smartphones.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence correspond à l'événement $T \cup L$. En additionnant les probabilités de T et L, l'intersection est comptée deux fois : il faut donc la soustraire une fois. Avec les valeurs obtenues précédemment :

1. $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$.
2. $P(T \cup L) = 0,030 + 0,080 - 0,010 = 0,100$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T ∪ L)=0,100, soit 10 % des smartphones.

Question 3° c). Calculer la probabilité P_T(L) qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la proportion des smartphones touchés par T qui sont aussi touchés par L. La probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité de l'intersection par celle de T. En reprenant les résultats précédents :

1. $P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)}$.
2. $P_T(L) = \frac{0,010}{0,030} = 0,333\ldots$, soit 0,333 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P_T(L)=0,333 au millième près.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Un prélèvement correspond à une épreuve à deux issues : le smartphone est non réparable avec la probabilité 0,045, ou réparable avec la probabilité complémentaire 0,955. Le stock est assez important pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise : les 50 épreuves sont indépendantes et ont la même probabilité de succès, où le succès désigne ici un appareil non réparable. Le nombre X de succès suit donc une loi binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun des 50 appareils prélevés n'est non réparable. La probabilité qu'un appareil soit réparable est le complément de 0,045, soit 0,955. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité que les 50 appareils soient réparables est le produit de 50 probabilités identiques :

$P(X = 0) = (1 - 0,045)^{50} = 0,1000388\ldots$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que tous les appareils soient réparables est 0,100 au millième près.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S à chaque étape.

À chaque passage de la boucle, l'algorithme ajoute la probabilité $P(X = i)$ à la somme précédente, initialisée à 0. Les probabilités sont calculées avec la loi binomiale de paramètres 50 et 0,045. Le tableau présente les probabilités et sommes successives arrondies au millième, comme demandé dans l'énoncé.

i	0	1	2	3
P(X=i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Valeurs manquantes du tableau de l'algorithme

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,1	0,236	0,272	0,205
S	0,1	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X=i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

À la fin de la boucle, S est la somme des probabilités pour les valeurs $i = 0, 1, 2, 3$. Le tableau donne cette somme au millième : 0,813. Comme X compte les smartphones non réparables d'un lot, S représente la probabilité qu'un lot contienne au plus trois appareils non réparables, autrement dit environ 81,3 % des lots.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S=0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus trois appareils non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est np. Ici, le nombre moyen de smartphones non réparables dans un lot de 50 vaut :

$$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$$

Sur un grand nombre de lots de cette taille, on comptera donc en moyenne 2,25 appareils non réparables par lot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Pour une loi normale, l'intervalle central de 95 % s'étend approximativement de 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ici, l'écart type vaut 0,037. La demi-largeur recherchée est donc $h = 1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Arrondie au centième, cette valeur donne 0,07, troisième réponse proposée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral au seuil de 5 % : la région d'acceptation est l'intervalle central de 95 % sous H_0. Avec $h \approx 0,07$, la règle peut s'énoncer directement à partir de la fréquence observée :

- Si $0,48 \leq f \leq 0,62$, on ne rejette pas H_0.
- Si $f < 0,48$ ou $f > 0,62$, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $0,48 \leq f \leq 0,62$; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Appliquer la règle de décision et donner la conclusion du test.

La fréquence observée est $f = 76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse de la région d'acceptation, 0,48. Elle appartient donc à la région de rejet. Au seuil de 5 %, les résultats de l'échantillon conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes partageant cette opinion est égale à 0,55.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f \approx 0,422$: on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient dépend de la spécialité et va de 1 à 3. Elle évalue la résolution d'équations différentielles, l'étude d'un modèle de train à très haute vitesse, le calcul intégral, les probabilités, la loi binomiale et le test d'hypothèse appliqué à l'obsolescence des smartphones.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Lorsque f représente une distance en fonction du temps, f' représente la vitesse instantanée dans les unités correspondantes.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n, p), P(X = k) = C(n, k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Une probabilité conditionnelle vérifie P(A sachant B) = P(A ∩ B)/P(B), si P(B) est non nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir les kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de comparer la vitesse à l'objectif de 400 km/h.
- Pour une aire, tenir compte des limites de l'intégrale, de la symétrie de la pièce et des unités graphiques.
- Pour justifier une loi binomiale, préciser le nombre d'essais, l'indépendance et la probabilité constante de succès.
- Dans le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux deux bornes de l'intervalle de décision et conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment comparer la vitesse calculée à l'objectif de 400 km/h ?

La dérivée donne ici une vitesse en kilomètres par minute. Multipliez cette valeur par 60 pour l'exprimer en kilomètres par heure, puis vérifiez si la vitesse est atteinte avant la limite de deux minutes.

Q : Comment calculer l'aire hachurée à partir de la fonction g ?

Calculez d'abord l'aire sous la courbe de g entre 0 et 3 avec la primitive fournie. Combinez ensuite cette aire avec celle du rectangle et utilisez la symétrie de la pièce pour obtenir l'aire totale.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et quelle calculatrice est autorisée ?

L'épreuve dure deux heures. Le sujet autorise tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, et interdit tout autre matériel. Respectez les arrondis indiqués dans chaque question.

Q : Comment formuler la conclusion du test d'hypothèse ?

Comparez la fréquence observée 76/180 à l'intervalle de décision construit sous H0 au seuil de 5 %. Indiquez si H0 est rejetée, puis exprimez la conclusion au sujet de la proportion annoncée de 55 %.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsaeronautique.fr/assets/annales/bts-aeronautique/E2 - Mathématiques/2018/BTS Aéronautique - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Aéronautique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.